

# Estudios Matemáticos NM

Calculadoras de pantalla gráfica

Primeros exámenes: 2006

Programa del Diploma

## Material de ayuda al profesor





Programa del Diploma

Material de ayuda al profesor de  
**Estudios Matemáticos NM**

Calculadoras de pantalla gráfica

Primeros exámenes: 2006

**Organización del Bachillerato Internacional**

Buenos Aires

Cardiff

Ginebra

Nueva York

Singapur

**Programa del Diploma**  
**Material de ayuda al profesor de Estudios Matemáticos NM:**  
**calculadoras de pantalla gráfica**

Versión en español del documento publicado en mayo de 2005 con el título  
*Mathematical Studies SL (graphic display calculators)—teacher support material*

Publicada en septiembre de 2005

por la Organización del Bachillerato Internacional  
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate  
Cardiff, Wales GB CF23 8GL  
Reino Unido  
Tel.: + 44 29 2054 7777  
Fax: + 44 29 2054 7778  
Sitio web: [www.ibo.org](http://www.ibo.org)

© Organización del Bachillerato Internacional, 2005

La Organización del Bachillerato Internacional es una fundación educativa internacional sin fines de lucro. Fue creada en 1968 y tiene sede legal en Suiza.

IBO agradece la autorización para reproducir en esta publicación material protegido por derechos de autor. Cuando procede, se han citado las fuentes originales y, de serle notificado, IBO enmendará cualquier error u omisión con la mayor brevedad posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible para todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional de la misma.

Los artículos promocionales y las publicaciones de IBO en sus lenguas oficiales y de trabajo pueden adquirirse a través del catálogo en línea, disponible en [www.ibo.org](http://www.ibo.org) al seleccionar **Publicaciones** en el menú de atajos. Las consultas sobre pedidos deben dirigirse al departamento de ventas en Cardiff.

Tel.: +44 29 2054 7746  
Fax: +44 29 2054 7779  
Correo-e: [sales@ibo.org](mailto:sales@ibo.org)

*Impreso en el Reino Unido por Anthony Rowe Ltd (Chippenham, Wiltshire).*

## Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Sección A: Casio 9850 GB+</b>	<b>2</b>
Funciones principales	2
Ejemplos de uso de las funciones principales en el curso de Estudios Matemáticos NM	8
Ejemplos tomados del banco de preguntas	19
<b>Sección B: Texas Instruments TI-83+</b>	<b>26</b>
Funciones principales	26
Ejemplos de uso de las funciones principales en el curso de Estudios Matemáticos NM	31
Ejemplos tomados del banco de preguntas	47



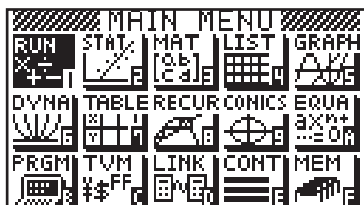
## Introducción

Este documento proporciona orientación a profesores y alumnos sobre el uso de las calculadoras de pantalla gráfica. Existe una gran diversidad de tipos de calculadoras de pantalla gráfica, pero la orientación que aquí se ofrece se refiere a dos modelos: Casio 9850 GB+ y Texas Instruments TI-83+.

La orientación se centra en las funciones principales de cada modelo, que se ponen de relieve mediante su uso en la resolución de ejemplos de preguntas.

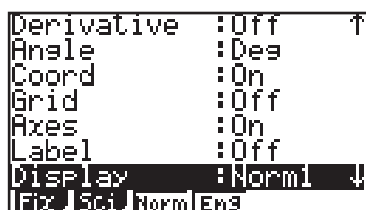
## Funciones principales

### El modo RUN (operaciones)



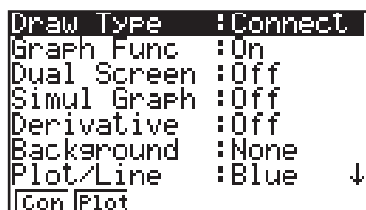
Presione "Set up" en la calculadora.

La calculadora debe estar siempre en el modo "Degree".



- "Derivative" debe estar en "On" para el análisis de funciones.
- "Fix" da el número de cifras decimales que aparecen.
- "Sci" significa "científica", y se selecciona para utilizar la notación científica. Los alumnos deben saber pasar de nuevo de la notación científica propia de la calculadora a la notación matemática.

### El modo GRAPH (gráficas)/ configuración

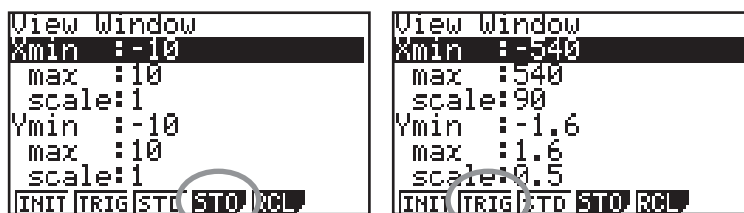


- "Draw Type" dibuja una gráfica, bien como una función continua o bien como puntos.
- Dibuja las gráficas una a una o simultáneamente.
- "Dual Screen" debe estar en "G-T" para dibujar a la vez la gráfica y la tabla.
- Cuando "Dual Screen" está en "G-T", la pantalla se divide verticalmente en dos partes. En el lado izquierdo está la gráfica y en el derecho la tabla de valores.



"F6" dibuja la gráfica de  $y =$ .

- En "View Window", el usuario introduce el dominio y el recorrido requeridos (valores de  $x$  e  $y$ ).



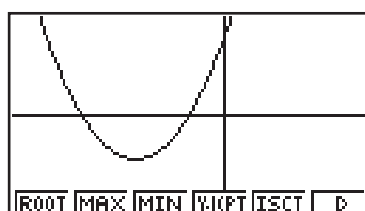
- "Standard (STD)" es un buen punto de partida para la mayoría de las funciones.
- "TRIG" es para las funciones periódicas.

Presione "Zoom" en la calculadora.



Presione "Trace" para mover el cursor a lo largo de la gráfica.

Presione "G-SOLV" para calcular valores numéricos.



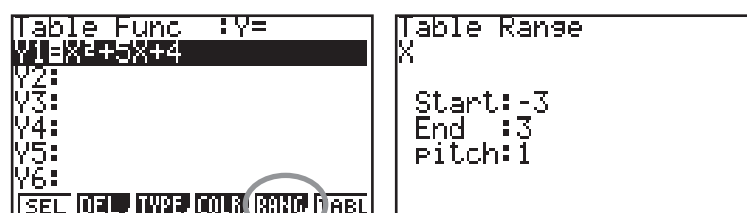
## Uso de "G-SOLV"

- Para determinar las intersecciones con el eje  $x$ , sitúe el cursor a la izquierda del punto de intersección, presione "EXE", sitúe el cursor a la derecha del punto de intersección y vuelva a presionar "EXE". Presione de nuevo "EXE" para que aparezca el valor de la raíz.
- "MAX" se usa para determinar los puntos que son máximos locales (se procede del mismo modo que para las raíces); "MIN" se usa para determinar los puntos que son mínimos locales (se procede del mismo modo que para las raíces).
- Para determinar la intersección con el eje  $y$ , "ISCT" se usa para calcular la intersección entre dos curvas.

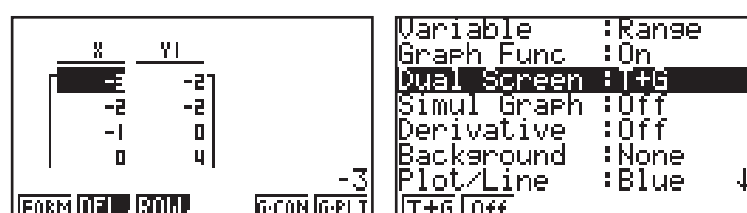
"X-calc" e "Y-calc" sirven para calcular valores particulares.

## El modo TABLE (tablas)

"F6" muestra la tabla de valores de la expresión que se introduce en "y = ".

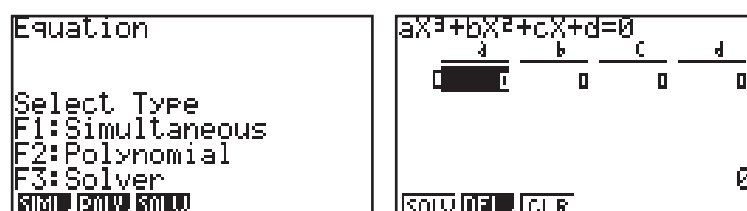


- Use "Range" para introducir el dominio requerido (valores de  $x$ ).
- Introduzca los valores de  $x$  directamente sobre la pantalla para determinar los valores correspondientes de  $y$ .



- Cambie "Dual Screen" a "T+G" para ver al mismo tiempo la tabla y la gráfica.

## El modo EQUA (ecuaciones)



- "Solver" permite resolver ecuaciones algebraicas.
- Seleccione "Polynomial" para introducir los coeficientes de las ecuaciones de segundo y de tercer grado.
- Seleccione "Simultaneous" para introducir los coeficientes de las ecuaciones lineales simultáneas.

## El modo RECUR (recursivo)

Use "Recur" para determinar términos de sucesiones y sumas de series.

The RECUR mode interface consists of several screens:

- Settings Screen:** Options include Display (On), Draw Type (Connect), Graph Func (On), Dual Screen (Off), Simul Graph (Off), Background (None), Plot/Line (Blue), and On/Off.
- Select Type Screen:** Options include F1:  $a_n = A_n + B$ , F2:  $a_{n+1} = A_n + B_n + C$ , and F3:  $a_{n+2} = A_{n+1} + B_n + \dots$ . A circle highlights the F2 option.
- Recursion Screen:** Shows the formula  $a_{n+1} = 7n + 8$  and the initial term  $a_1 =$ .
- Table Range n Screen:** Shows Start: 1 and End: 20.
- Table Screen:** Displays a table with columns  $n+1$ ,  $a_{n+1}$ , and  $\Sigma a_{n+1}$ . The data rows are:
 

$n+1$	$a_{n+1}$	$\Sigma a_{n+1}$
17	120	1088
18	127	1215
19	134	1349
20	141	1490

 The table is followed by the number 20. Navigation buttons at the bottom include FORM DEL, WEB 2-CON, and G-PLT.

## El modo MAT (matrices)

Use "Matrix" para el análisis de la distribución chi-cuadrado.

- Introduzca los valores de la tabla de contingencia para el cálculo de chi-cuadrado, después utilice "STAT-TEST".

The MAT mode interface includes the following screens:

- Matrix Screen:** Lists Mat A through Mat F, all set to None. A circle highlights the Mat A entry.
- Matrix A Screen:** Shows a 3x2 matrix with values:
 

	1	2
1	21	36
2	51	12
3	19	16

 The screen also shows the number 24 and navigation buttons ROP, ROW, and COL.
- $\chi^2$  Test Screen:** Shows Observed: Mat A and the Execute button.
- Matrix Screen (Results):** Lists Mat U through Mat Z, all set to None. Mat Ans is highlighted and set to 3x2.

Los valores esperados aparecen al final de la lista ("Mat Ans"), una vez realizada la prueba de chi-cuadrado en el modo "STAT".

## El modo STAT (estadística)

List 1	List 2	List 3	List 4	StatGraph1
8	26			Graph Type : MedBox
9	25			XList : List1
10	21			Frequency : 1
11	19			Graph Color : Blue
12				Outliers : Off
GRAPH	CALC	TEST	INTR	DIST
				Hist Box

- Use "GRPH" para establecer el tipo de gráfica y la fuente de datos.
- Use "HiSt" y "Box" para los histogramas y los diagramas de caja y bigotes.

## Resumen estadístico en una variable

- Use "CALC" para el resumen estadístico en una variable.

1-Variable	1-Variable
$\bar{x}$ = 25.6363636	minX = 12
$\Sigma x$ = 282	Q1 = 19
$\Sigma x^2$ = 8026	Med = 25
$s_{\text{don}}$ = 8.50959594	Q3 = 34
$s_{\text{don-1}}$ = 8.92493952	$\bar{x} - s_{\text{don}}$ = 17.1267676
n = 11	$\bar{x} + s_{\text{don}}$ = 34.1459595
1VAR	2VAR
REG	SET

## Estadística en dos variables

List 1	List 2	List 3	List 4	LinearReg
8	26	230		a = 2.74788861
9	25	190		b = 120.008673
10	21	162		r = 0.33394132
11	19	176		r <sup>2</sup> = 0.1115168
12				y = ax + b
X	Med	X^2	X^3	X^4
1VAR	2VAR	REG	SET	

Regresión de mínimos cuadrados

Regresión y correlación

- Para la prueba de chi-cuadrado, introduzca los datos en forma de matriz.

List 1	List 2	List 3	List 4
8	26		
9	25		
10	21		
11	19		
12			
Z	t	CHI	F
			ANOVA

- Use "DIST" y a continuación "NORM" para los cálculos en distribuciones normales.

List 1	List 2	List 3	List 4	Normal C.D
1	25	125		Lower : 0
2	35	246		Upper : 0
3	12	189		$\sigma$ : 0
4	42	263		$\mu$ : 0
5	15	210		Execute
			25	
NORM	t	CHI	F	BINOM

## TVM

Presione "F1" para el interés simple.

Presione "F2" para el interés compuesto.

Simple Interest:365	Compound Interest:End
n =120	n =120
I% =5	I% =5
PV =-8000	PV =-8000
	PMT=0
	FV =0
	P/Y=12
SI SFV	↓
	n I% PV PMT FV AMT

- Introduzca en "PV" un valor negativo.
- "n" = número total de períodos de pago.
- "I%" = tasa de interés (tipo de interés) anual.
- "PV" = valor actual, expresado como un número negativo para que represente las salidas de efectivo (inversión).
- "PMT" = cuota.
- "FV" = valor futuro.
- "P/Y" = número de períodos de pago al año.
- "C/Y" = número de períodos compuestos al año.

### Problemas de interés compuesto

Puesto que al resolver problemas de interés compuesto no hay cuotas, se debe poner "0" en "PMT", y en "C/Y" se debe poner el número correcto de períodos compuestos al año (véanse los ejemplos de matemáticas financieras en las páginas 17–18).

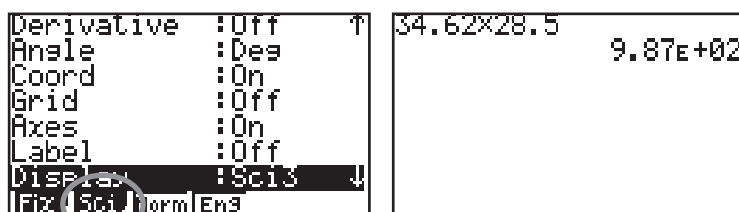
## Ejemplos de uso de las funciones principales en la asignatura de Estudios Matemáticos NM

### La notación científica

En el modo RUN, pulse “SHIFT”, “MENU” y, en “Display”, seleccione “Sci”.

#### Pregunta

Calcule  $34,62 \times 28,5$  y escriba la respuesta en la forma  $a \times 10^k$  con  $1 \leq a < 10$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .



Los alumnos deben saber que E+02 significa  $10^2$  y escribir la respuesta utilizando la notación matemática correcta.

Si en la pregunta se pidiese aproximar la respuesta a dos cifras decimales, la respuesta del alumno debería ser:

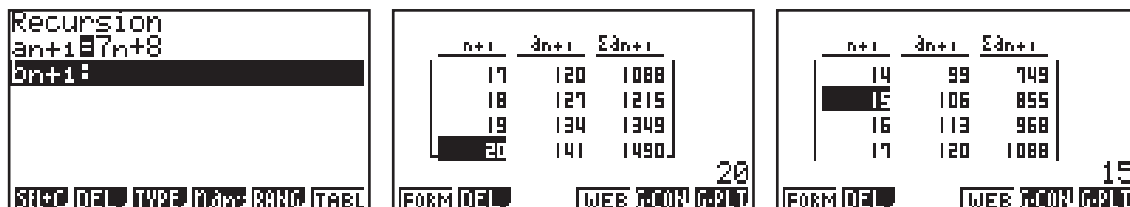
$$(34,62 \times 28,5) = 9,87 \times 10^2$$

### Progresiones aritméticas y geométricas

#### Pregunta

El primer término de una progresión aritmética es 8, la diferencia común es 7.

- Halle el término que ocupa el lugar 20.
- Halle la suma de los 15 primeros términos.



Pantalla “Recursion”

**a)**

Respuesta del alumno:

$$U_{20} = 8 + (19 \times 7) = 141$$

**b)**

Respuesta del alumno:

$$S_{15} = 15/2 (2 \times 8 + 14 \times 7) = 855$$

Si se pide a los alumnos que averigüen a qué término corresponde un número dado, pueden hacer uso de "Solver".

Dada una sucesión cuyo primer término es 3 y la razón común es 8, halle cuál es el primer término mayor que 200.

- Utilice "Equation" y, a continuación, "Solver".
- Rellene  $A$  y  $R$  para  $AR^{(n-1)} = 200$  y, a continuación, presione "Enter".

```
Equation
Select Type
F1:Simultaneous
F2:Polynomial
F3:Solver
SIMULPOLYSOLV
```

```
Eq: 3x8^(N-1)=200
N=3.01963123
Lft=200
Rat=200
[REPT]
```

Respuesta del alumno:

$$3 \times 8^{(n-1)} > 200$$

$$n = 4$$

## Resolución de ecuaciones de segundo grado

- Use "Equation" y, a continuación, "Polynomial".
- "Degree 2".

### Pregunta

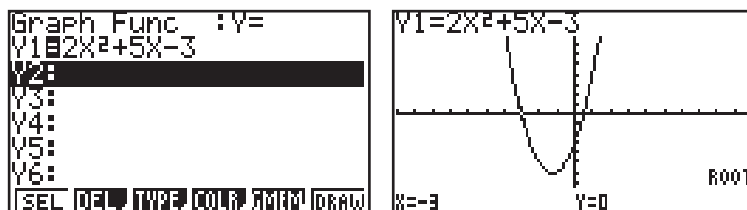
Halle los valores de  $x$  que verifican la ecuación  $2x^2 + 5x - 3 = 0$ .

```
Equation
Select Type
F1:Simultaneous
F2:Polynomial
F3:Solver
SIMULPOLYSOLV
```

```
ax^2+bx+c=0
a b c
0 5 -3]
2
[SOLV DEL CLR
```

```
ax^2+bx+c=0
a b c
1 0.5 -3]
0.5
[REPT
```

- Otra posibilidad consiste en utilizar "Graph":  $Y = 2x^2 + 5x - 3$ .
- Verifique los valores de "View Window".
- "Draw".
- "G-SOLV" y, a continuación, "ROOT".



Utilice "Trace" para hallar la otra raíz.

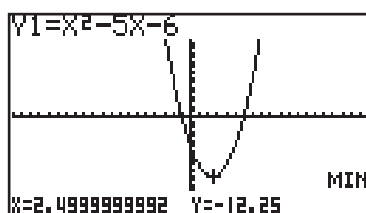
El alumno puede escribir las soluciones sin necesidad de mostrar ninguna otra operación. Si se quiere que haga algo más, la pregunta podría empezar pidiendo la descomposición factorial de la función.

## Vértice de la función cuadrática

### Pregunta

Halle el vértice de la función  $y = x^2 - 5x - 6$ .

Utilice "G-SOLV" y, a continuación, "MIN".



La respuesta del alumno podría ilustrar al menos dos posibles situaciones, dependiendo de lo que quiera evaluar el examinador.

Para mostrar que el vértice está en el eje de simetría, el alumno escribiría:

$$x = (-b/2a) = 2,5 \text{ (5/2)}; \quad y = -12,25$$

Si la pregunta requiere el uso de derivadas, el alumno escribiría:

$$dy/dx = 2x - 5 = 0 \text{ en puntos singulares}$$

$$\Rightarrow x = 5/2; y = -12,25$$

Si no se especifica el método, entonces ambos son válidos.

## Intersección de curvas

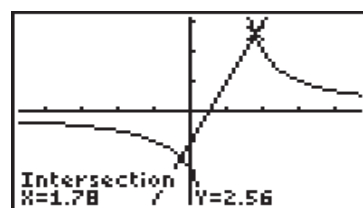
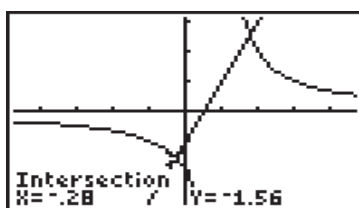
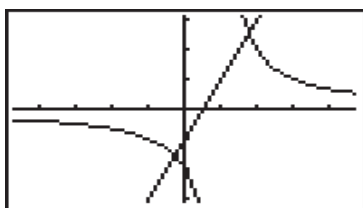
- Obtenga las gráficas de las curvas y utilice la función intersección igual que en casos anteriores.

### Pregunta

Halle los puntos de intersección de las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = 2/(x - 1) \text{ e } y = 2x - 1$$





Es suficiente que el alumno escriba:

$$2/(x - 1) = 2x - 1 \Rightarrow x = -0,281; 1,78$$

## Ecuaciones exponenciales

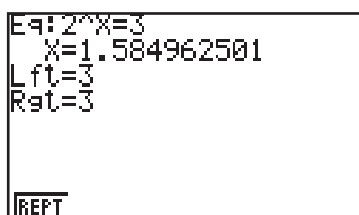
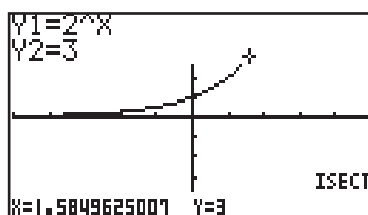
“Graph”:  $Y_1 = a^x$ .

“Graph”:  $Y_2 = b$ .

Después utilice la función intersección como en el caso anterior, o utilice “Solver”.

### Pregunta

Halle el valor de  $x$  en la ecuación anterior si  $a = 2$  y  $b = 3$ .



Respuesta del alumno:

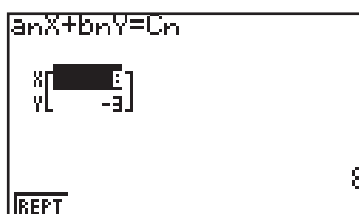
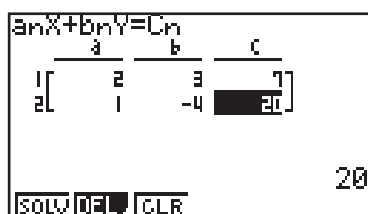
$$2^x = 3 \Rightarrow x = 1,58 \text{ (no es necesario mostrar operaciones).}$$

## Sistemas de ecuaciones

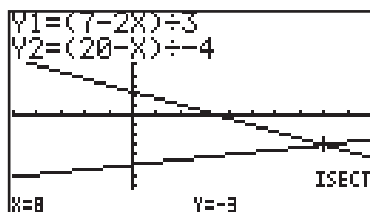
Use “Equation” y, a continuación, “Simultaneous”.

### Pregunta

Resuelva el sistema de ecuaciones  $2x + 3y = 7$ ;  $x - 4y = 20$ .



- Otra posibilidad es que el usuario transforme las ecuaciones en  $y = (7 - 2x)/3$  et  $y = (20 - x)/-4$ , después obtenga sus gráficas y halle el punto de intersección.



Los alumnos deben escribir las dos ecuaciones y dar la solución para  $x$  e  $y$ .

Respuesta del alumno:

$$x = 8, y = -3$$

## Tablas de verdad

- Usando "1" para "verdadero" y "0" para "falso", introduzca los valores de  $p$  y  $q$  en listas.

### Pregunta

Establezca la tabla de verdad para  $p \vee \neg q$ .

- Coloque el cursor sobre el encabezamiento "List".
- Seleccione "Option".
- Presione "F1" para obtener la lista y, a continuación, "F6" para el proceso lógico.

	List 3	List 4	List 5	List 6
1	1	1	0	
2	1	0	1	
3	0	1	0	
4	0	0	1	
5				

Not List 4  
List L→M Dim Fill Seq 0

	List 3	List 4	List 5	List 6
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	0	1	1
5				

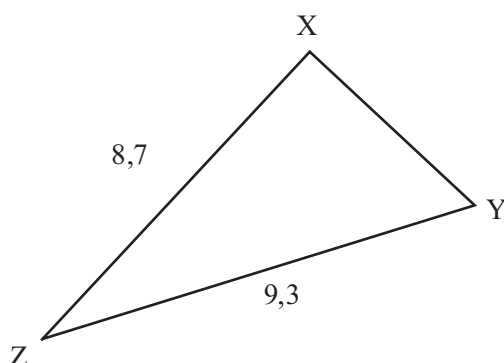
List 3 Or List 5  
List L→M Dim Fill Seq 0

Los alumnos deben mostrar todos los pasos intermedios aunque la respuesta final se pueda obtener directamente de la calculadora.

## El teorema del coseno usando "Solver"

### Pregunta

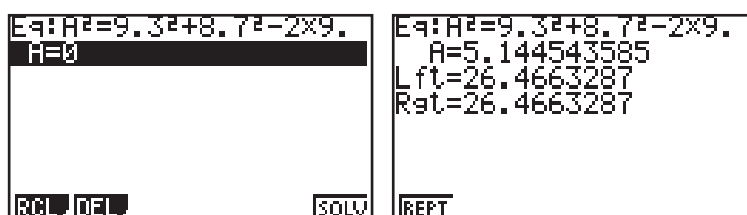
En el triángulo XYZ,  $XZ = 8,7$  cm,  $YZ = 9,3$  cm y el ángulo  $XZY = 33^\circ$ . Calcule la longitud del lado XY.



Utilice "Equation" y, a continuación, "Solver".

"ALPHA": "A = ".

También se podría utilizar "X = ".



El alumno debe poner los valores correspondientes en la ecuación dada por el teorema del coseno y después escribir la respuesta, por ejemplo:

$$Z^2 = 9,3^2 + 8,7^2 - 2 \times 9,3 \times 8,7 \cos(33^\circ)$$

$$Z = 5,14$$

## Matrices

Esta opción sólo va a ser necesaria para introducir los datos observados en la distribución chi-cuadrado. En el apartado "El modo MAT" (página 5) se pueden ver las instrucciones.

### Pregunta

Introduzca una tabla de contingencia de orden  $2 \times 3$  y realice una prueba de chi-cuadrado.

- Utilice "Matrix" y, a continuación, "STAT-TEST" para las matrices.

H	1	2	3
1	15	26	35
2	24	35	67

R-OP ROW COL

$\chi^2$  Test  
 $\chi^2=1.1374$   
 $P=0.56624$   
 $df=2$   
 Expected=Mat Ans

Ans	1	2	3
1	14.616	22.95	38.376
2	24.326	38.049	63.623

14.67326733

R-OP ROW COL

Valores esperados

A menos que se plantee otro tipo de pregunta, este valor de chi-cuadrado, los grados de libertad y los valores esperados pueden obtenerse todos directamente de la calculadora. Sin embargo, los alumnos deben estar familiarizados con la fórmula y saber cómo utilizarla.

## Estadística

Esta opción permite introducir datos en listas, organizarlas en orden ascendente o descendente, y utilizar fórmulas para generar nuevas listas.

Utilice "Option".

List 1	List 2	List 3	List 4
1	5	14	14
2	10	21	35
3	14	32	67
4	18	16	83
5	22	8	91

6

GRAPH CALC TEST DATA DIST

List 1	List 2	List 3	List 4
1	6	14	14
2	10	21	35
3	14	32	67
4	18	16	83
5	22	8	91

Cum1 List 2

Sum Prod Cum1 %

- Use "GRPH" para seleccionar el tipo.
- Use "CALC" para el cálculo de diversos estadísticos.
- Use "TEST" para las pruebas de  $t$  y de chi-cuadrado.

### Pregunta

Utilice "CALC" para hallar la media, la mediana, la desviación típica, etc., de la siguiente lista de números:

12, 15, 19, 21, 25, 25, 26, 28, 34, 35.

List 1	List 2	List 3	List 4
1	12	189	
2	15	210	
3	19	176	
4	21	162	
5	25	125	

1VAR 2VAR REG SET

1-Variable  
 $\bar{x}$  =24  
 $\Sigma x$  =240  
 $\Sigma x^2$  =6262  
 $\bar{x}\sigma_n$  =7.08519583  
 $\bar{x}\sigma_{n-1}$  =7.46845216  
 $n$  =10

1VAR 2VAR REG SET

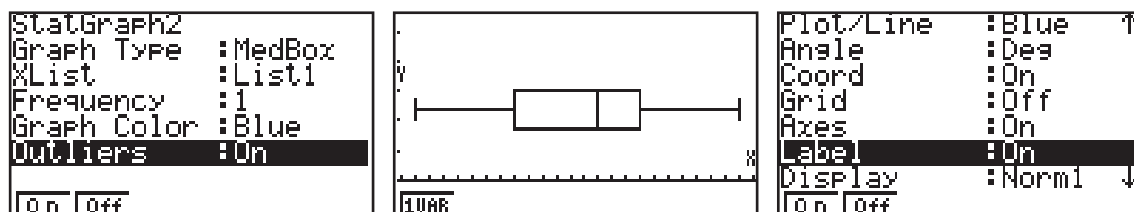
1-Variable  
 $Q1$  =19  
 $Med$  =25  
 $Q3$  =28  
 $\bar{x}-\bar{x}\sigma_n$  =16.9148041  
 $\bar{x}+\bar{x}\sigma_n$  =31.0851958  
 $maxX$  =35

1VAR 2VAR REG SET

Para datos agrupados, si se utiliza el punto medio de los intervalos de clase se obtiene una estimación de la media y de la desviación típica, pero los valores que se obtienen para los cuartiles **no** son precisos.

Los alumnos pueden escribir los valores de la media y de la desviación típica obtenidos directamente de la calculadora sin mostrar otras operaciones, pero deben tener cuidado de introducir correctamente los datos. A una respuesta incorrecta tomada directamente de la calculadora, sin mostrar operaciones, no se le asigna ningún punto.

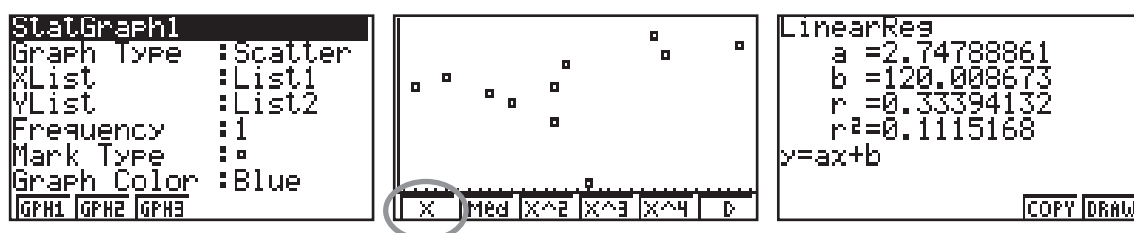
- Utilice "GRPH" para ver la forma de los datos.



- Utilice "Trace" para ver: mínimo, 1<sup>er</sup> cuartil, mediana, 3<sup>er</sup> cuartil y máximo.
- Utilice "REG" y, a continuación, seleccione "2" para el análisis en dos variables.
- Utilice "Correlation" y, a continuación, "Regression".

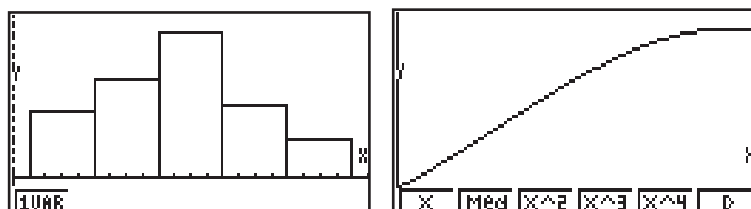
Respuesta del alumno:

12, 15, 19, 21, 25, 25, 26, 28, 34, 35  
189, 210, 176, 162, 145, 190, 230, 197, 285, 246



Si se proporcionan los datos, entonces los alumnos deben ser capaces de escribir directamente de la calculadora el coeficiente de correlación,  $r$ , y la ecuación de la recta de regresión. Sin embargo, también deben estar familiarizados con las fórmulas y saber cómo utilizarlas.

- "Frequency Table": "List 1" representa los valores, "List 2" la frecuencia.
- "Cumulative Frequency": "List 3" es la frecuencia acumulada ("Cuml"). Utilice "List 2" y, a continuación, "Option".



- Utilice los extremos superiores del intervalo de clase.

## Análisis

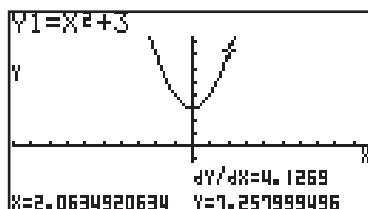
Presione "Set up" en la calculadora.

Variable	:Range
Graph Func	:On
Dual Screen	:Off
Simul Graph	:Off
Derivative	:On
Background	:None
Plot/Line	:Blue ↓
On/Off	

- "Derivative" debe estar en "On".

### Para calcular los valores de $y$ ; $dy/dx$ en cualquier punto de la curva

- Para dibujar la curva  $y = x^2 + 3$ , utilice "Trace" en el modo gráfico, o introduzca directamente los valores de  $x$  en la tabla.



X	Y1	Y'1
1	4	2
2	7	4
3	12	6
4	19	8

FORM DEL ROW G-COM G-PLT

Respuesta del alumno:

$$dy/dx = 2x$$

$$\text{cuando } x = 2, dy/dx = 4$$

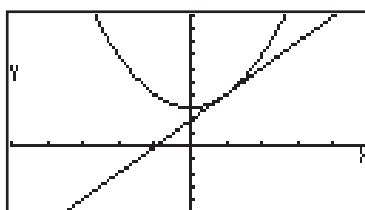
## Ecuación de la recta tangente

### Pregunta

Halle la ecuación de la tangente a la curva  $y = x^2 + 3$  en el punto (1, 4).

X	Y1	Y'1
-3	12	-6
-2	7	-4
-1	4	-2
0	3	0

FORM DEL ROW G-COM G-PLT



Respuesta del alumno:

$$dy/dx = 2x$$

$$\text{en } x = 1, dy/dx = 2 (=m)$$

$$y = 2x + c$$

$$4 = 2 \times 1 + c$$

$$c = 2$$

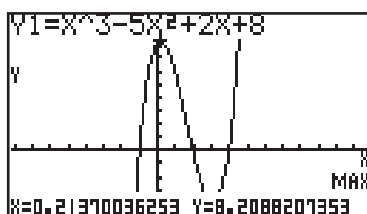
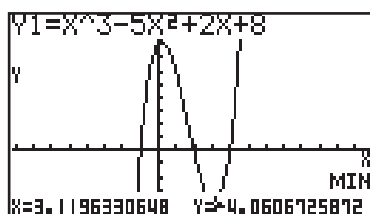
La ecuación es  $y = 2x + 2$ .

## Cálculo de máximos y mínimos locales

### Pregunta

Halle los puntos de la curva  $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  que sean máximos o mínimos locales.

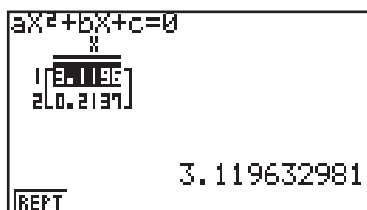
- Introduzca la ecuación en "Y1 = " y, a continuación, obtenga la gráfica.
- Utilice "G-SOLV" y, a continuación, "MIN".
- Proceda de modo análogo para el máximo.



Respuesta del alumno:

$dy/dx = 3x^2 - 10x + 2 = 0$  en puntos singulares.

- El alumno tendrá entonces que resolver la ecuación de segundo grado; y podrá hacerlo mediante un programa, la función "solver", la gráfica o la fórmula.



Respuesta del alumno:

$x = 3,12$  o bien  $0,214$

Si los alumnos introducen la derivada de la función en Y2, pueden utilizar "CALC" o "Table" para hallar los valores de  $y$ .

## Matemáticas financieras

### Pregunta

Roberto invierte 600 euros en un banco que ofrece un interés compuesto anual del 2,75%.

- Calcule cuánto dinero tiene Roberto después de 4 años.
- Calcule en cuántos años se duplica su inversión.

```
Compound Interest:Ban
n =4
I% =2.75
PU =-600
PMT=0
FV =668.7727556
P/Y=1
↓
|n| I% |PV| PMT| FV| AMT|
```

```
Compound Interest:Ban
n =26.55185862
I% =2.75
PU =-600
PMT=0
FV =1200
P/Y=1
↓
|n| I% |PV| PMT| FV| AMT|
```

**a)**

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^4 = 668,77$$

**b)**

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^n = 1200$$

$$n = 26$$

**Pregunta**

Ana invierte 600 euros en otro banco que ofrece un interés compuesto anualmente. Su inversión se duplica en 20 años. Halle la tasa de interés (tipo de interés) que ofrece este banco.

```
Compound Interest:Ban
n =20
I% =3.526492884
PU =-600
PMT=0
FV =1200
P/Y=1
↓
|n| I% |PV| PMT| FV| AMT|
```

Respuesta del alumno:

$$600(1 + r/100)^{20} = 1200$$

$$r = 3,53\%$$

**Pregunta**

Se invierte en un banco una cantidad fija de 1100 dólares al comienzo del año, a una tasa de interés (tipo de interés) del 12% anual, compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero habrá en esa cuenta bancaria al final del año?

```
Compound Interest:End
n =1
I% =12
PU =-1100
PMT=0
FV =1239.507533
P/Y=1
↓
|n| I% |PV| PMT| FV| AMT|
```

Respuesta del alumno:

$$1100(1 + 12/1200)^{12} = 1239,51$$



## Ejemplos tomados del banco de preguntas

## Prueba 1, pregunta 4

Roberto invierte 600 euros en un banco que ofrece un interés compuesto anual del 2,75%.

- Calcule cuánto dinero tiene Roberto después de 4 años.
- Calcule en cuántos años se duplica su inversión.

Ana invierte 600 euros en otro banco que ofrece un interés compuesto anualmente. Su inversión se duplica en 20 años.

- Halle la tasa de interés (tipo de interés) que ofrece este banco.

El alumno debe utilizar el modo de operaciones y después "TABLE" o bien "TVM".

**a)**

- Introduzca  $Y1 = 600(1 + 2,75/100)^x$ .

X	Y1
3.8	665.15
3.9	666.96
4	668.77
4.1	670.58

FORM DEL ROW G-COM G-PLT 4

Compound Interest:End					
n	=	4			
I%	=	2.75			
PV	=	-600			
PMT	=	0			
FV	=	668.7727556			
P/Y	=	1			
n	I%	PV	PMT	FV	AMT

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^4 = 668,77$$

**b)**

- Recorra la tabla hasta que aparezca para y el valor 1200.

X	Y1
25.5	1198.3
25.6	1201.6
25.7	1204.8
25.8	1208.1

FORM DEL ROW G-COM G-PLT 25.6

Compound Interest:End					
n	=	25.55035862			
I%	=	2.75			
PV	=	-600			
PMT	=	0			
FV	=	1200			
P/Y	=	1			
n	I%	PV	PMT	FV	AMT

El primer valor es 25,6; por tanto la respuesta es 26 años.

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^n = 1200$$

$$n = 26$$

c)

- No es posible hallar la respuesta mediante tablas. Utilice "TVM".

Compound Interest: Bsn

n = 20

I% = 3.526492384

PV = -600

PMT = 0

FV = 1200

P/Y = 1

↓

n	I%	PV	PMT	FV	AMT
---	----	----	-----	----	-----

Respuesta del alumno:

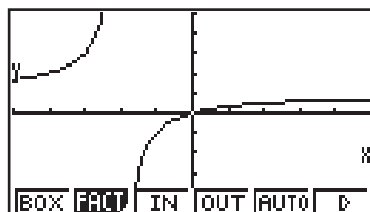
$$600(1 + r/100)^{20} = 1200$$

$$r = 3,53\%$$

## Prueba 1, pregunta 11

- Dibuje aproximadamente la gráfica de  $y = \frac{x}{2+x}$  para  $-10 \leq x \leq 10$ .
- A partir de lo anterior escriba las ecuaciones de las asíntotas vertical y horizontal.

a)



b)

- Para hallar la asíntota vertical, el alumno puede aplicar la función "trace" a la gráfica, o utilizar la tabla de valores (cuando aparece "ERROR" en el valor de  $y$ , entonces el valor correspondiente de  $x$  es donde se encuentra la asíntota).

Respuesta del alumno:

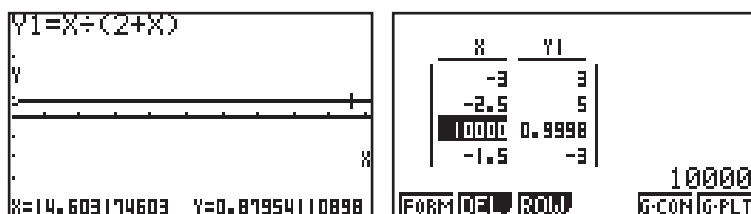
La asíntota vertical está en  $x = -2$ .

X	Y1
-3	3
-2.5	5
-2	ERROR
-1.5	-3

-2

FORM DEL ROW G-COM G-PLT

- Para hallar la asíntota horizontal, el alumno tendrá que desplazarse por la curva para valores grandes o pequeños de  $x$ , o introducir valores grandes de  $x$  en la tabla.



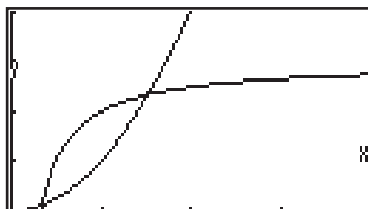
Respuesta del alumno:

La asíntota horizontal es  $y = 1$ .

## Prueba 2, pregunta 1

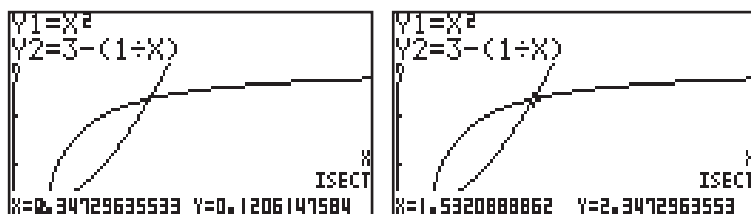
- En el mismo sistema de ejes dibuje aproximadamente las curvas  $y = x^2$  e  $y = 3 - \frac{1}{x}$  para valores de  $x$  desde 0 hasta 4 y valores de  $y$  desde 0 hasta 4. Muestre las escalas en los ejes.
- Halle los puntos de intersección de estas dos curvas.
- Halle la pendiente de la curva  $y = 3 - \frac{1}{x}$  en función de  $x$ .
  - Halle el valor de esta pendiente en el punto (1, 2).
- Halle la ecuación de la tangente a la curva  $y = 3 - \frac{1}{x}$  en el punto (1, 2).

**a)**



- El alumno debe añadir la escala.

**b)**



**c)**

Respuesta del alumno:

- $dy/dx = 1/x^2$
- $dy/dx = 1/1 = 1$

Este valor también se puede hallar con la calculadora.

dy/dx				
X	Y1	Y2	Y'2	
0.5	1	1	1	4
1	2	2	2	1
1.5	3	2.3333	0.4444	
2	4	2.5	0.25	1

FORM DEL ROW G-COM G-FLT

**d)**

Respuesta del alumno:

$$y = mx + c$$

$$y = 1x + c$$

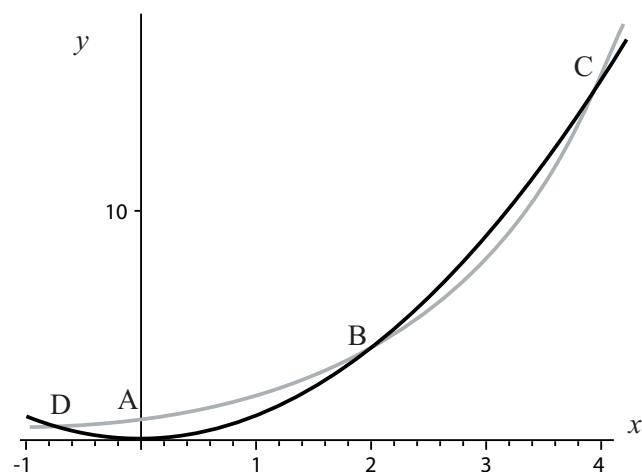
$$2 = 1 \times 1 + c$$

$$c = 1$$

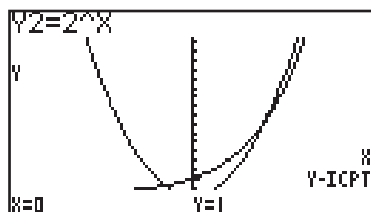
$$y = x + 1$$

## Prueba 2, pregunta 3

La figura dada a continuación muestra las gráficas de las funciones  $y = x^2$  e  $y = 2^x$  para valores de  $x$  entre  $-1$  y  $4$ . Los puntos de intersección de las dos curvas están marcados como B, C y D.

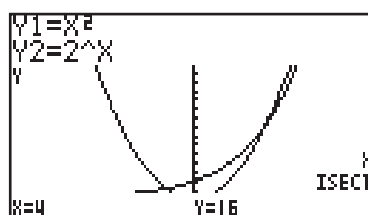
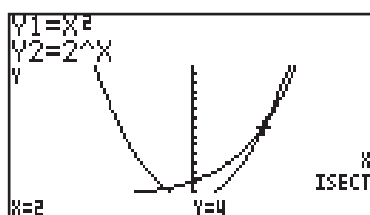


- Escriba las coordenadas del punto A.
- Escriba las coordenadas de los puntos B y C.
- Halle la abscisa,  $x$ , del punto D.
- Escriba, usando notación de intervalo, todos los valores de  $x$  para los cuales  $2x \leq x^2$ .

**a)**

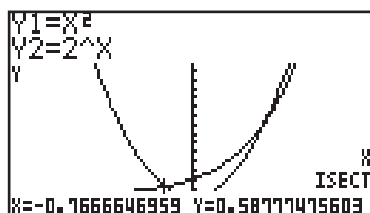
Respuesta del alumno:

Cuando  $x = 0$ ,  $y = 1$ , por tanto las coordenadas de A son  $(0, 1)$ .

**b)**

Respuesta del alumno:

Las coordenadas de B son  $(2, 4)$  y las de C son  $(4, 16)$ .

**c)**

Respuesta del alumno:

La abscisa,  $x$ , de D es  $-0,767$ .

**d)**

A partir de la gráfica y de los puntos de intersección, el alumno deber ser capaz de ver que  $2^x \leq x^2$  para  $2 \leq x \leq 4$  y para  $-\infty \leq x \leq -0,767$ .

## Prueba 2, pregunta 4

En el circo, un payaso se balancea desde una cuerda. Un estudiante decide estudiar el movimiento del payaso. Los resultados se pueden mostrar mediante la gráfica de la función  $f(x) = (0,8^x)(5\sin 100x)$ , donde  $x$  es la distancia horizontal en metros.

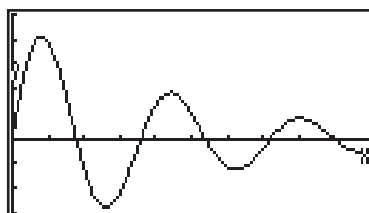
- Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 10$  y  $-3 \leq f(x) \leq 5$ .
- Halle las coordenadas del primer punto máximo local.
- Halle las coordenadas de un punto donde la curva corta al eje  $x$ .

Otro payaso sale disparado por un cañón. El payaso pasa por los puntos dados en la siguiente tabla:

Distancia horizontal ( $x$ )	Distancia vertical ( $y$ )
0,00341	0,0102
0,0238	0,0714
0,563	1,69
1,92	5,76
3,40	10,2

- Halle el coeficiente de correlación,  $r$ , y comente las características de este valor.
- Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ .
- Dibuje aproximadamente esta recta sobre la gráfica de  $f(x)$  del apartado a).
- Halle las coordenadas de uno de los puntos donde esta recta corta a la curva.

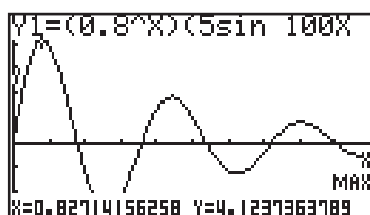
**a)**



- El alumno debe añadir la escala en el dibujo

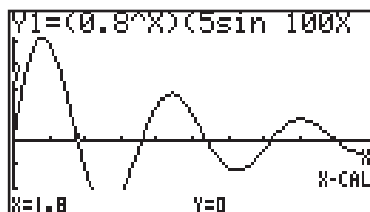
**b)**

- Utilice "G-SOLV" y, a continuación, "MAX".



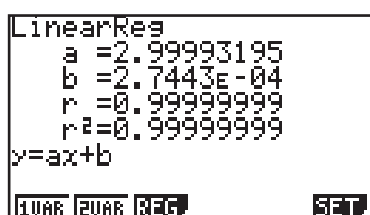
Respuesta del alumno:

El primer máximo se encuentra en el punto (0,827; 4,12).

**c)**

Respuesta del alumno:

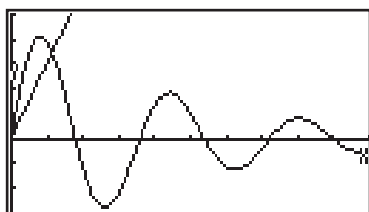
(1,8; 0)

**d)**

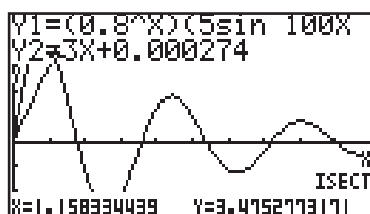
Respuesta del alumno:

 $r = 1$ , por tanto la correlación es perfecta y positiva.**e)**

Respuesta del alumno:

La ecuación de la recta de regresión es  $y = 3x + 0,000274$  o  $y = 3x$ .**f)**

- El alumno debe añadir la escala en el dibujo.

**(g)**

Respuesta del alumno:

Un punto de intersección es (1,16; 3,48).

## Funciones principales

### El modo RUN (operaciones)

Presione "Mode" en la calculadora.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

- "Sci" significa "científica", y se selecciona para utilizar la notación científica. Los alumnos deben saber pasar de nuevo de la notación científica propia de la calculadora a la notación matemática.
- "Float" da el número de cifras decimales que aparecen.
- Los alumnos deben comprobar que la calculadora está en la opción "Degree".
- Los alumnos deben comprobar que la calculadora está en la opción "Func".
- "Connected" dibuja las gráficas como funciones continuas o como puntos.
- "Sequential" dibuja las gráficas una a una o simultáneamente.
- "Real" es el modo en que deben trabajar los alumnos de Estudios Matemáticos.
- Con "Full" se utiliza toda la pantalla para la gráfica.
- Con "Horiz" la gráfica ocupa la mitad superior de la pantalla. Los alumnos pueden realizar los cálculos en la mitad inferior.
- "G-T" divide la pantalla en vertical. En el lado izquierdo está la gráfica y en el derecho la tabla de valores.

```
WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1
```

- "WINDOW": aquí el usuario introduce el intervalo de valores requerido para  $x$  e  $y$ .

```
ZOOM MEMORY
1:ZBox
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7↓ZTrig
```

ZOOM



- "4: ZDecimal" se usa para hacer desaparecer las asíntotas verticales de las gráficas.
- "6: ZStandard" da los intervalos de  $-10$  a  $10$ .
- "7: ZTrig" se usa para las funciones trigonométricas.
- "0: ZoomFit" ajusta la gráfica a la pantalla.

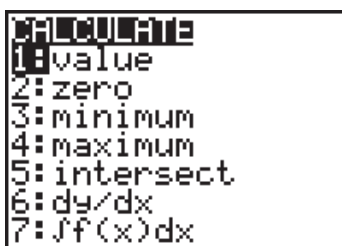


FORMAT (2nd ZOOM)

- La pantalla muestra si aparecen o no los ejes, etc.

Presione "TRACE" para mover el cursor a lo largo de la gráfica.

Use "CALCULATE (2nd Trace)" para obtener diversos cálculos.



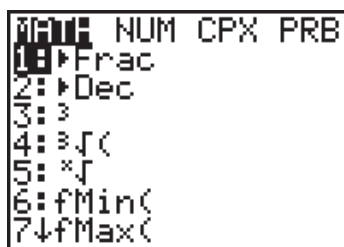
- "1:value" calcula el valor de  $y$  para cualquier valor dado de  $x$ .
- "2:zero" calcula la intersección con el eje  $x$ . Coloque el cursor a la izquierda de la intersección, presione "enter", después coloque el cursor a la derecha de la intersección, presione "enter" y presione "enter" de nuevo para obtener el valor de la raíz.
- "3:minimum" calcula los mínimos locales (se procede del mismo modo que para las raíces).
- "4:maximum" calcula los máximos locales (se procede del mismo modo que para las raíces).
- "5:intersect" calcula el punto de intersección de dos curvas. Coloque el cursor cerca del punto de intersección y presione "enter" tres veces.
- "6:dy/dx" da el valor de la pendiente para el valor de  $x$  que el alumno introduzca.
- "7:  $\int f(x)dx$ " da el área bajo la curva entre los dos valores de  $x$  que el usuario introduzca.

## El modo gráfico

Presione "GRAPH" para obtener la gráfica de las funciones definidas previamente en la pantalla que se obtiene al pulsar la tecla " $y =$ ".

## El modo de tablas

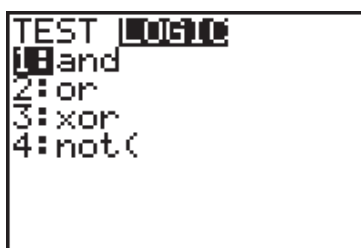
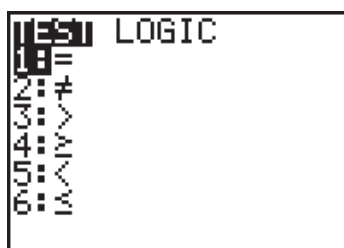
En este modo, la calculadora muestra la tabla de valores de la expresión que se ha introducido en "y =".



Menú de pantalla de "MATH"

- "1:" da el resultado en forma de fracción.
- "2:" da el resultado en forma decimal.
- "3:" da el cubo de un número (por ejemplo, el alumno introduce 10 en la pantalla, después presiona math, elige 3 y presiona enter).
- "4:" da la raíz cúbica.
- "5:" da la raíz de cualquier índice.
- "6:" da la abscisa,  $x$ , del mínimo.
- "7:" da la abscisa,  $x$ , del máximo.
- "8:" da el valor de la derivada en un punto determinado (el alumno introduce "nDeriv(function,  $x$ , value) enter").
- "9:" da el área bajo la curva entre dos puntos (el alumno introduce "fnInt(function,  $x$ , lower limit, upper limit) enter").
- "10:" da la solución para una incógnita (véanse los ejemplos que se encuentran más adelante).

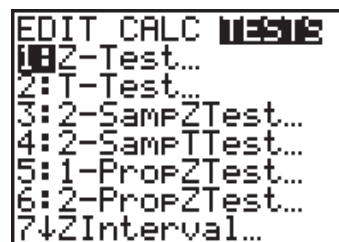
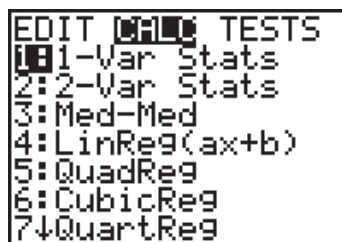
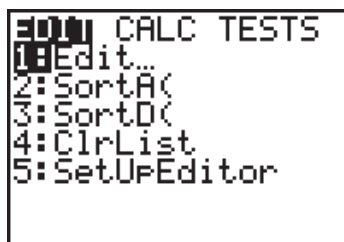
Los alumnos de Estudios Matemáticos no suelen utilizar NUM, CPX y PRB.



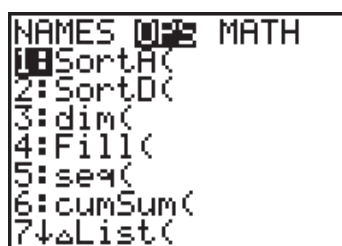
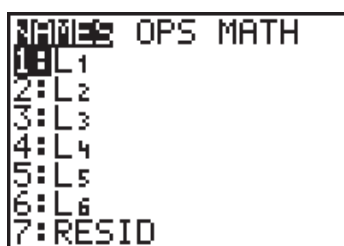
Menú de pantalla de "TEST" (2nd MATH)

- "TEST" da los signos de igual, distinto, menor que, etc.
- "LOGIC" da las funciones "and", "or", "xor" ( "o" exclusivo) y "not". (Se puede usar con las tablas de verdad.)

## El modo de estadística



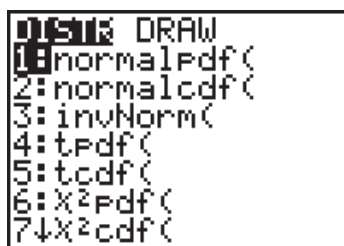
- El menú de pantalla de "EDIT" muestra las siguientes funciones:
  - "1: Edit" (para introducir los valores en las listas)
  - "2: SortA" (organiza los elementos de la lista en orden ascendente)
  - "3: SortD" (organiza los elementos de la lista en orden descendente)
  - "4: ClrList" (borra los elementos de una lista)
  - "5: SetUpEditor" (permite configurar el editor de listas).
- El menú de pantalla de "CALC" muestra las siguientes funciones:
  - "1: 1-Var Stats" (para hallar la media, etc.)
  - "2: 2-Var Stats2" (se utiliza en los diagramas de dispersión para los puntos medios y en la regresión lineal si se requiere la desviación típica de  $x$  e  $y$ )
  - "3: Med-med" (mediana-mediana)
  - "4: LinReg( $ax + b$ )" (regresión lineal)
  - "5: QuadReg" (regresión cuadrática), etc. (en la asignatura de Estudios Matemáticos no se utiliza casi ninguna de estas funciones).
- El menú de pantalla de "TESTS" da acceso a diversas funciones. Las dos que se utilizan más habitualmente en la asignatura de Estudios Matemáticos son "C:  $\chi^2$ -Test" (prueba de chi-cuadrado) y "E: LinRegTTest" (prueba  $t$ ).



### LIST (2nd STAT) (Listas)

- En el menú de pantalla "NAMES" figuran "1:List1", etc.
- "OPS":
  - "1: SortA" (organiza los elementos en orden ascendente)
  - "2: SortD" (organiza los elementos en orden descendente)
  - "3: dim" (establece la dimensión de la lista)
  - "4: Fill" (rellena la lista con un valor constante)
  - "5: seq" (crea una sucesión)
  - etc.

- El menú de pantalla de "MATH" permite que los alumnos calculen el mínimo, el máximo, la media, etc. de una lista de números. Los números se deben introducir, por ejemplo, como sigue: Mean({2,3,4,5,6}).

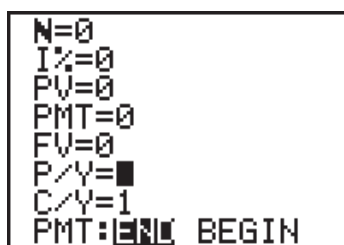


DISTR (2ND VARS) (Funciones de distribución)

- "1: normalpdf" (función densidad de probabilidad de la normal).
- "2: normalcdf" (función densidad acumulada de la normal, para hallar el área bajo la curva normal estandarizada).
- "3: invNorm" (inversa de la densidad acumulada de la normal, para hallar el valor  $x$  asociado a un área bajo la curva).
- etc.

## Matemáticas financieras

Presione "APPS" seleccione "Finance" y, bajo el encabezado "CALC", seleccione "TVM Solver" para obtener la pantalla que se muestra a continuación.



- "N:" número total de períodos de pago.
- "I%:" tasa de interés (tipo de interés) anual.
- "PV:" valor actual, expresado como un número negativo para que represente las salidas de efectivo (inversión).
- "PMT:" cuota.
- "FV:" valor futuro.
- "P/Y:" número de períodos de pago al año.
- "C/Y:" número de períodos compuestos al año.

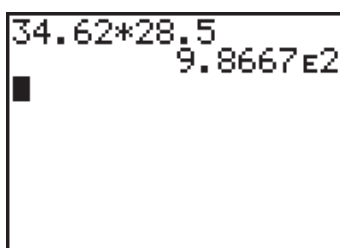
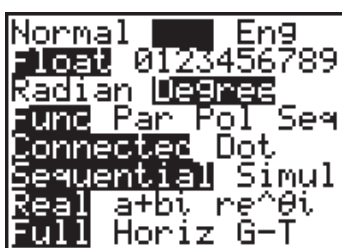
Puesto que al resolver problemas de interés compuesto no hay cuotas, se debe poner "0" en "PMT" y "1" en "P/Y" (véanse los ejemplos de matemáticas financieras en las páginas 45–46).

## Ejemplos de uso de las funciones principales en la asignatura de Estudios Matemáticos NM

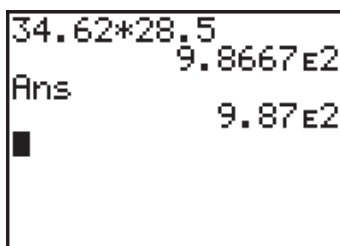
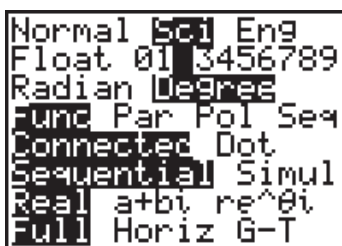
### La notación científica

#### Pregunta

Calcule  $34,62 \times 28,5$  y escriba la respuesta en la forma  $a \times 10^k$ , con  $1 \leq a < 10$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .



Los alumnos deben saber que  $E2$  significa  $10^2$  y escribir la respuesta utilizando la notación matemática correcta.



Si en la pregunta se pidiese aproximar la respuesta a dos cifras decimales, la respuesta del alumno debería ser:

$$(34,62 \times 28,5) = 9,87 \times 10^2$$

### Progresiones aritméticas y geométricas

#### Pregunta

El primer término de una progresión aritmética es 8, la diferencia común es 7.

- Halle el término que ocupa el lugar 20.
- Halle la suma de los 15 primeros términos.

#### a)

- Utilice "LIST", después "OPS" y después "5". Introduzca " $8 + 7x$ ,  $x$ , 0, 19" y presione "enter". Con ello se obtienen los veinte primeros términos, desde 8 a 141. El término que ocupa el lugar 20 es 141.

```
seq(8+7X,X,0,19)
...20 127 134 141)
```

Respuesta del alumno:

$$U_{20} = 8 + (19 \times 7) = 141$$

**b)**

- Utilice "LIST", después "MATH", "5", de nuevo "LIST", "OPS", "5". Introduzca "8+7x, x, 0,14" y presione "enter". El resultado es 855.

```
sum(seq(8+7X,X,0
,14))
855
```

Respuesta del alumno:

$$S_{15} = 15/2 (2 \times 8 + 14 \times 7) = 855$$

Si se pide a los alumnos que averigüen a qué término corresponde un número dado, pueden hacer uso de SOLVER.

Dada una sucesión cuyo primer término es 3 y la razón común es 8, halle cuál es el primer término mayor que 200.

- Utilice "MATH" y después "SOLVER". Para introducir los datos, presione la flecha arriba, introduzca " $AR^{(x-1)} - 200$ " y presione "enter".
- Introduzca los valores A = 3, R = 8, coloque el cursor sobre X y presione "ALPHA" y después "ENTER" para obtener la solución. El valor que se obtiene es  $X = 3.0196$  (aquí 0196 son valores decimales)... así pues, el cuarto término ya es mayor que 200.

```
A*R^(X-1)-200=0
A=3
R=8
X=3.0196312296...
bound=(-1E99,1...
left-rt=0
```

Respuesta del alumno:

$$3 \times 8^{(n-1)} > 200$$

$$n = 4$$

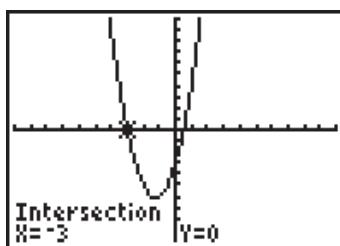
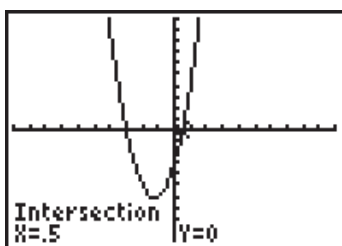
## Resolución de ecuaciones de segundo grado

### Pregunta

Halle los valores de  $x$  que verifican la ecuación  $2x^2 + 5x - 3 = 0$ .

### Por medio de la gráfica

- Presione "Y=".
- Introduzca " $Y_1 = 2x^2 + 5x - 3$ ".
- Introduzca " $Y_2 = 0$ ".
- Compruebe los valores de "WINDOW" y, a continuación, presione "GRAPH".
- "2nd TRACE", después "5", mueva entonces el cursor para colocarlo cerca de un punto de intersección. Presione "enter" tres veces para obtener la solución. Repita el proceso para hallar el segundo punto de intersección.



### Usando "SOLVER"

- Utilice "MATH" y, a continuación, "SOLVER". Para introducir los datos, presione la flecha arriba, introduzca la ecuación y presione "enter". Presione "ALPHA" y después "ENTER" para obtener la solución.
- Con ello se obtiene uno de los puntos de intersección. Introduzca una estimación para otro valor de  $x$  y después presione de nuevo "ALPHA" y "ENTER".

```

2X^2+5X-3=0
X=-3.000000000...
bound=-1E99,1...
left-rt=0
  
```

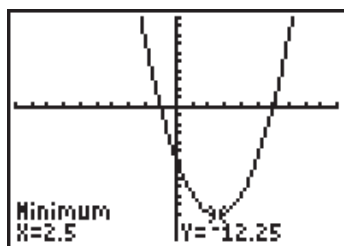
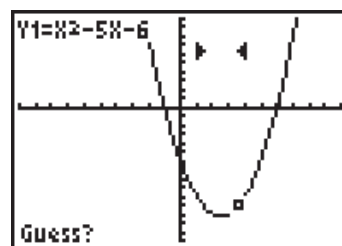
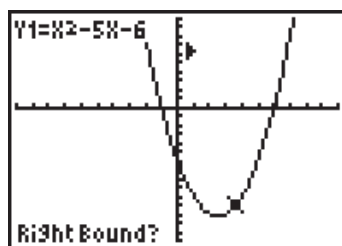
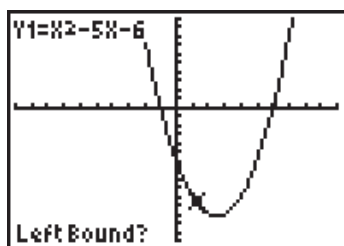
El alumno puede escribir las soluciones sin necesidad de mostrar ninguna otra operación. Si se quiere que haga algo más, la pregunta podría empezar pidiendo la descomposición factorial de la función.

## Vértice de la función cuadrática

### Pregunta

Halle el vértice de la función  $y = x^2 - 5x - 6$ .

- Presione "Y = ".
- Introduzca " $Y_1 = x^2 - 5x - 6$ ".
- Utilice "GRAPH", después "2nd TRACE" y, a continuación, "3". Coloque el cursor a la izquierda del vértice y presione "enter". A continuación, coloque el cursor a la derecha del vértice, presione "enter" y vuelva a presionar "enter" para obtener las coordenadas del vértice.



La respuesta del alumno podría ilustrar al menos dos posibles situaciones, dependiendo de lo que quiera evaluar el examinador.

Para mostrar que el vértice está en el eje de simetría, el alumno escribiría:

$$x = (-b/2a) = 2,5 \ (5/2); y = -12,25$$

Si la pregunta requiere el uso de derivadas, el alumno escribiría :

$$dy/dx = 2x - 5 = 0 \text{ en puntos singulares}$$

$$\Rightarrow x = 5/2; y = -12,25$$

Si no se especifica el método, entonces ambos son válidos.



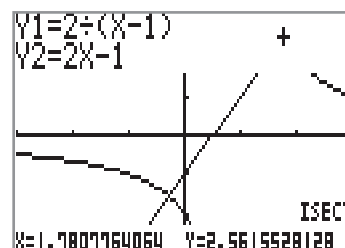
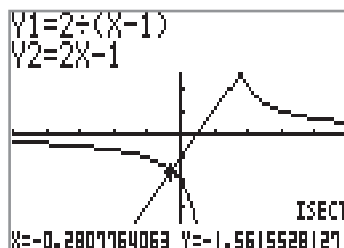
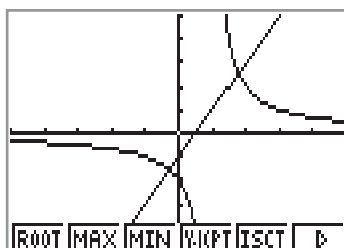
## Intersección de curvas

Obtenga las gráficas de las curvas y utilice la función intersección como se ha mostrado anteriormente.

### Pregunta

Halle los puntos de intersección de las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = 2/(x-1) \text{ e } y = 2x - 1.$$



Es suficiente que el alumno escriba:

$$2/(x-1) = 2x - 1 \Rightarrow x = -0,281; 1,78.$$

## Ecuaciones exponenciales

### Usando "Graph"

Obtenga la gráfica de:  $Y_1 = a^x$ .

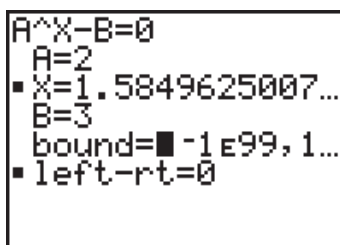
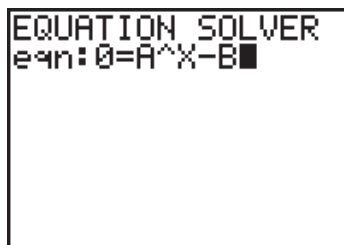
Obtenga la gráfica de:  $Y_2 = b$ .

Utilice entonces la función intersección como en casos anteriores.

### Usando "SOLVER"

Presione "MATH", seleccione "SOLVER" y presione "ENTER". Presione la flecha arriba, introduzca la ecuación " $A^x - B$ " y presione "enter". Introduzca los valores de A y B, coloque después el cursor en X y presione "ALPHA ENTER" para obtener la solución.

Halle el valor de  $x$  en la ecuación anterior si  $A = 2$  y  $B = 3$ .



Respuesta del alumno:

$$2^x = 3 \Rightarrow x = 1,58 \text{ (no es necesario mostrar operaciones).}$$

## Sistemas de ecuaciones

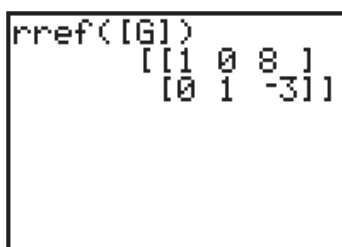
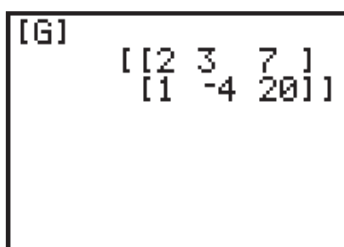
### Usando matrices

#### Pregunta

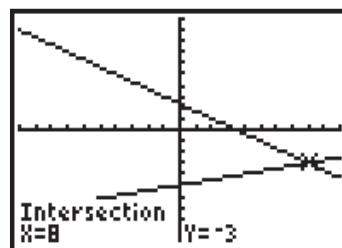
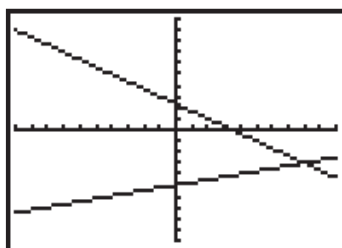
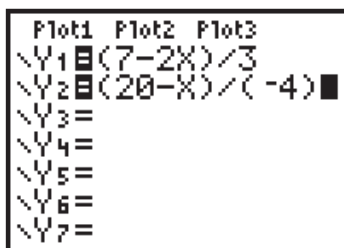
Resuelva el sistema  $2x + 3y = 7$   
 $x - 4y = 20$

- Siga los siguientes pasos: "MATRIX – EDIT – ENTER – 2 – ENTER – 3 – ENTER – 2 – ENTER – 3 – ENTER – 7 – ENTER – 1 – ENTER – -4 – ENTER – 20 – ENTER – 2<sup>ND</sup> MODE (QUIT) – MATRIX – MATH – B: rref – ENTER – MATRIX – ENTER – ENTER".

La solución es  $x = 8$  e  $y = -3$ .



- Otra posibilidad es que el usuario transforme las ecuaciones en  $y = (7 - 2x)/3$  e  $y = (20 - x)/-4$ , después obtenga sus gráficas y halle el punto de intersección.



Los alumnos deben escribir las dos ecuaciones y dar la solución para  $x$  e  $y$ .

## Tablas de verdad

Usando "1" para "verdadero" y "0" para "falso", introduzca los valores de  $p$  y  $q$  en listas.

#### Pregunta

Construya la tabla de verdad para  $(p \vee q) \Rightarrow r$ .

- Introduzca (11110000) en la Lista 1, (11001100) en la Lista 2 y (10101010) en la Lista 3.
- Proceda entonces según lo siguiente:  
 "Test Logic – not L1 – Test Logic – xor – ENTER – L2) – Test Logic – or – L3 – ENTER".

L1	L2	L3	3
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	
-----			
L3(9) =			

```
not(L1 xor L2) o
r L3
{1 1 1 0 1 0 1 ...
█
```

- Otra posibilidad es que el alumno introduzca la ecuación como Lista 4.

L2	L3	L4	4
1	1	1	
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
L4 = {1, 1, 1, 0, 1, 0...			

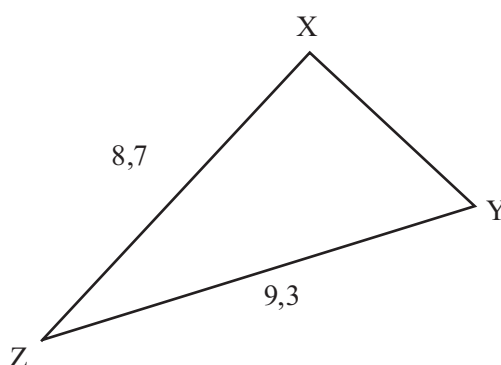
Recuerde que  $p \Rightarrow q$  es lo mismo que  $\neg p \vee q$ .

Los alumnos deben mostrar todos los pasos intermedios aunque la respuesta final se pueda obtener directamente de la calculadora.

## El teorema del coseno usando "SOLVER"

### Pregunta

En el triángulo XYZ,  $XZ = 8,7$  cm,  $YZ = 9,3$  cm y el ángulo  $XZY = 33^\circ$ . Calcule la longitud del lado XY.



- Utilice "MATH - SOLVER - ENTER", después presione la flecha arriba. Introduzca la ecuación  $X^2 + Y^2 - Z^2 - 2XY\cos A$ , después presione "enter". Introduzca los valores de X, Y, A, coloque el cursor en Z y presione "ALPHA ENTER" para obtener la solución para el valor del lado XY.
- Si los alumnos quieren averiguar el valor de un ángulo, deben repetir el mismo proceso, pero introduciendo los valores que se conocen y colocando el cursor en la letra correspondiente a lo que se quiere calcular.

```

EQUATION SOLVER
eqn:0=X^2+Y^2-Z^2-2
XYcos(A)

```

```

X^2+Y^2-Z^2-2XYc...=0
X=9.3
Y=8.7
Z=5.1445435847...
A=33
bound=-1E99,1...
left-rt=0

```

El alumno debe poner los valores correspondientes en la ecuación dada por el teorema del coseno y después escribir la respuesta, por ejemplo:

$$Z^2 = 9,3^2 + 8,7^2 - 2 \times 9,3 \times 8,7 \cos(33^\circ)$$

$$Z = 5,14$$

## Matrices

Esta opción sólo va a ser necesaria para introducir los datos observados en la distribución chi-cuadrado.

- “NAMES” ofrece una lista de las matrices que el usuario ha introducido previamente.

```

NAMES MATH EDIT
1: [A] 2x3
2: [B] 3x3
3: [C] 3x3
4: [D] 2x1
5: [E] 2x3
6: [F]
7↓ [G]

```

- “MATH” permite calcular el determinante, la traspuesta, la dimensión, etc.

```

NAMES MATH EDIT
1: det(
2: T
3: dim(
4: Fill(
5: identity(
6: randM(
7↓ augment(

```

- “EDIT” permite modificar la información almacenada, o introducir nuevos datos.

```

NAMES MATH EDIT
1: [A] 2x3
2: [B] 3x3
3: [C] 3x3
4: [D] 2x1
5: [E] 2x3
6: [F]
7↓ [G]

```

- Para introducir una matriz de orden  $2 \times 3$ , use “MATRIX – EDIT – 2 – ENTER – 3 – ENTER”, y, a continuación, introduzca los valores de los elementos.

```

MATRIX[A] 2 x3
[ 2      3      7 ]
[ 1      -4     20 ]

```

Véase también el ejemplo del apartado sobre chi-cuadrado de la página 42.

## Estadística

- “EDIT” permite introducir datos en listas, organizarlas en orden ascendente o descendente y eliminarlas.

```

EDIT CALC TESTS
1:Edit...
2:SortA(
3:SortD(
4:ClrList
5:SetUpEditor

```

- “CALC” permite calcular diversos estadísticos.

```

EDIT CALC TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg

```

- “TESTS” permite realizar diversas pruebas.

```

EDIT CALC TESTS
1:Z-Test...
2:T-Test...
3:2-SampZTest...
4:2-SampTTest...
5:1-PropZTest...
6:2-PropZTest...
7:ZInterval...

```

- Para introducir valores en las listas use “STAT – EDIT – ENTER”.

L1	L2	L3	Z
1	2	1	
2	4	1	
3	6	1	
4	10	1	
5	14	1	
6	16	4	
7	20	3	
L2(1)=2			

- En "L1" están los números 1,2,3,4,5,6,7.
- En "L2" están los números 2,4,6,10,14,16,20.
- Para hallar la media, mediana, desviación típica, etc. de una lista de números, si "L1" representa los números y "L2" las frecuencias, presione "STAT – CALC – 1:1-Var Stats – ENTER – L1 (2nd 1) – coma (,) – L2 (2nd 2) – ENTER".

```
1-Var Stats
x̄=5.194444444
Σx=374
Σx²=2138
Sx=1.658430353
σx=1.646873206
↓n=72
```

- En esta pantalla, desplace el cursor hacia abajo para obtener más valores.

```
1-Var Stats
↑n=72
minX=1
Q1=4
Med=5.5
Q3=7
maxX=7
```

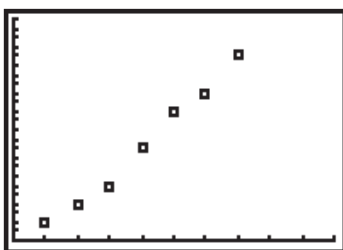
Para datos agrupados, si se utiliza el punto medio de los intervalos de clase se obtiene una estimación de la media y de la desviación típica, pero los valores que se obtienen para los cuartiles **no** son precisos.

Los alumnos pueden escribir los valores de la media y de la desviación típica obtenidos directamente de la calculadora sin mostrar otras operaciones, pero deben ser cuidadosos e introducir correctamente los datos. A una respuesta incorrecta tomada directamente de la calculadora, sin mostrar operaciones, no se le asigna ningún punto.

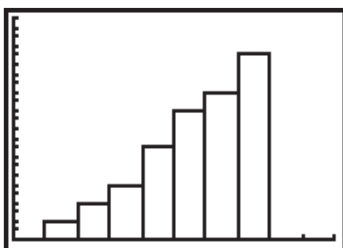
## Diagrama de dispersión, histograma, diagrama de caja y bigotes, frecuencia acumulada

Presione "STAT PLOT – ENTER – plot1 on – ENTER" y, a continuación, desplace el cursor hacia abajo para seleccionar el tipo de gráfica que se desea. Rellene las listas con los datos, ajuste los parámetros de "WINDOW" y, a continuación, presione "GRAPH".

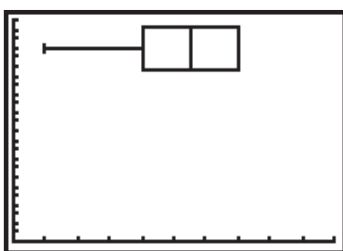
- Para los datos de las listas 1 y 2 anteriores, se obtiene el siguiente diagrama de dispersión (en sus gráficas los alumnos también deben poner la escala).



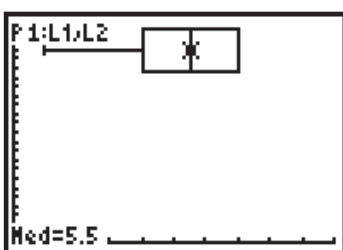
- El diagrama de barras que se obtiene es el siguiente (se debe poner la escala en los ejes).



- El diagrama de caja y bigotes que se obtiene es el siguiente (se debe poner la escala en los ejes).

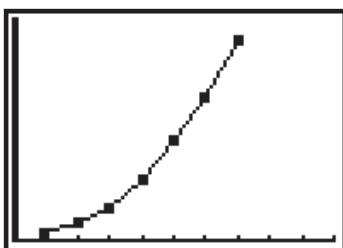


- Si se presiona la tecla "TRACE", el alumno accede a las características principales del diagrama de caja y bigotes (se debe poner la escala en los ejes).



Para obtener la tabla de frecuencias acumuladas, mueva el cursor hasta destacar "L3 – LIST – OPS – CumSum – ENTER – L2 – ENTER". Las frecuencias acumuladas aparecen en la lista 3.

Utilice "StatPlot", después resalte "Type 2 graph". La xList es L1 y la yList es L3. Compruebe que los parámetros de "window" son adecuados y, a continuación, presione "GRAPH".



## La prueba de chi-cuadrado

Introduzca en una matriz los datos observados. En el ejemplo son

```
5   6   12
8   10  8
9   9   14
```

en la matriz B.

- Utilice "STAT – TESTS – C:  $\chi^2$  – Test – ENTER". Coloque [B] después de "Observed" y [C] después de "Expected" (vaya a "MATRIX" para introducir estas letras). Sitúe el cursor sobre "Calculate" y presione "ENTER" para obtener el valor de chi-cuadrado y los grados de libertad. La calculadora obtiene automáticamente los valores esperados.

```
χ²-Test
Observed: [B]
Expected: [C]
Calculate Draw
```

```
[C]
[[6.25 7.10 9.6...
 [7.06 8.02 10.0...
 [8.69 9.88 13.0...
```

```
χ²-Test
χ²=2.490374611
P=.6463601936
df=4
```

A menos que se plantee otro tipo de pregunta, este valor de chi-cuadrado, los grados de libertad y los valores esperados pueden obtenerse todos directamente de la calculadora. Sin embargo, los alumnos deben estar familiarizados con la fórmula y saber cómo utilizarla.

## Recta de regresión

- Introduzca los datos en "L1" y "L2" (o cualquiera de las otras listas).
- Use "STAT – TESTS – E: LinRegTTest – ENTER", después introduzca los nombres de las listas seleccionadas. Mueva el cursor hacia abajo hasta "Calculate" y, a continuación, presione "ENTER".
- Se obtiene la recta de regresión y el coeficiente de correlación,  $r$ .

```
LinRegTTest
Xlist:L1
Ylist:L2
Freq:1
B & P:  $\neq$  <0 >0
RegEQ:
Calculate
```

```
LinRegTTest
y=a+bx
B≠0 and P≠0
t=20.04885338
P=5.706227E-6
df=5
↓a=-2
```

```
LinRegTTest
y=a+bx
B≠0 and P≠0
↑b=3.071428571
s=.8106434834
r²=.9877136752
r=.9938378516
```

Otra posibilidad es "STAT – CALC LinReg(ax + b)". Sin embargo, antes de realizar este cálculo, se debe poner "DiagnosticOn" (se encuentra en "CATALOG").

```
LinReg
y=ax+b
a=3.071428571
b=-2
r²=.9877136752
r=.9938378516
```

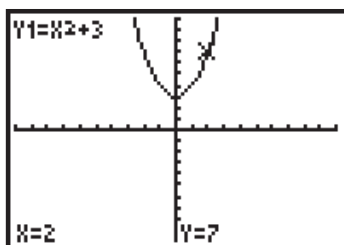
Si se proporcionan los datos, los alumnos deben ser capaces de escribir directamente de la calculadora el coeficiente de correlación,  $r$ , y la ecuación de la recta de regresión. Sin embargo, también deben estar familiarizados con las fórmulas y saber cómo utilizarlas.



## Análisis

### Para calcular el valor de Y en cualquier punto de la curva

Obtenga la gráfica de la curva, por ejemplo  $y = x^2 + 3$ , vaya a "CALC – value", introduzca el valor de  $x$ , por ejemplo  $x = 2$ , y, a continuación, presione "ENTER".

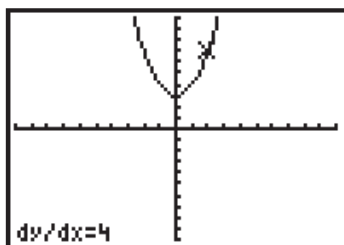


- También se puede usar "Table" para hallar este valor.

X	Y1	
0	3	
1	4	
2	7	
3	12	
4	19	
5	28	
6	39	
X=0		

### Para calcular el valor de la derivada en cualquier punto X de la curva

Obtenga la gráfica de la curva, por ejemplo,  $y = x^2 + 3$ , vaya a "CALC –  $dy/dx$ ", después introduzca el valor de  $x$ , por ejemplo  $x = 2$ , y, a continuación, presione "ENTER".



Respuesta del alumno:

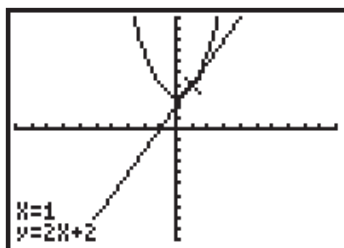
$$dy/dx = 2x$$

cuando  $x = 2$ ,  $dy/dx = 4$ .

## Ecuación de la recta tangente

Introduzca la ecuación en  $Y1 =$  . Use "GRAPH – ENTER – DRAW – 5:Tangent – ENTER". Introduzca el valor de  $x$  para el que se desea calcular la ecuación de la tangente y, a continuación, presione "ENTER". Aparece entonces dibujada la recta tangente y se obtiene su ecuación.

Halle la ecuación de la tangente a la curva  $y = x^2 + 3$  en el punto  $(1, 4)$ .



Respuesta del alumno:

$$dy/dx = 2x$$

$$\text{en } x = 1, dy/dx = 2 (=m)$$

$$y = 2x + c$$

$$4 = 2 \times 1 + c$$

$$c = 2.$$

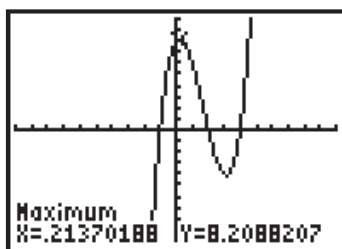
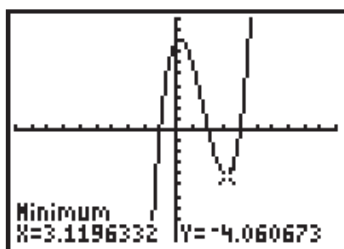
La ecuación es  $y = 2x + 2$ .

## Cálculo de máximos y mínimos locales

### Pregunta

Halle los puntos de la curva  $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  que sean máximos o mínimos locales.

- Introduzca la ecuación en  $Y1 =$ . Utilice después "GRAPH – CALC – minimum – ENTER". Coloque el cursor a la izquierda del mínimo y presione "ENTER". Coloque el cursor a la derecha del mínimo, presione "ENTER" y presione después de nuevo "ENTER". Proceda de modo análogo para el máximo.



Respuesta del alumno:

$$dy/dx = 3x^2 - 10x + 2 = 0 \text{ en puntos singulares.}$$

(Los alumnos tendrán entonces que resolver la ecuación de segundo grado. Podrán hacerlo mediante un programa, la función "solver", la gráfica o la fórmula.)

Respuesta del alumno:

$$x = 3,12 \text{ o bien } 0,214$$

(Si los alumnos introducen la derivada de la función en  $Y2$ , pueden utilizar "Calc Value" o "Table" para hallar los valores de  $y$ .)

## Matemáticas financieras

### Pregunta

Roberto invierte 600 euros en un banco que ofrece un interés compuesto anual del 2,75%.

- Calcule cuánto dinero tiene Roberto después de 4 años.
- Calcule en cuántos años se duplica su inversión.

**a)**

```
N=4
I%=2.75
PV=-600
PMT=0
FV=668.7727556
P/Y=1
C/Y=1
PMT: [ ] BEGIN
```

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^4 = 668,77$$

**b)**

```
N=25.55035862
I%=2.75
PV=-600
PMT=0
FV=1200
P/Y=1
C/Y=1
PMT: [ ] BEGIN
```

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^n = 1200$$

$$n = 26$$

### Pregunta

Ana invierte 600 euros en otro banco que ofrece un interés compuesto anualmente. Su inversión se duplica en 20 años. Halle la tasa de interés (tipo de interés) que ofrece este banco.

```
N=20
I%=3.526492384
PV=-600
PMT=0
FV=1200
P/Y=1
C/Y=1
PMT: [ ] BEGIN
```

Respuesta del alumno:

$$600(1 + r/100)^{20} = 1200$$

$$r = 3,53 \%$$

**Pregunta**

Se invierte en un banco una cantidad fija de 1100 dólares al comienzo del año, a una tasa de interés (tipo de interés) del 12% anual, compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero habrá en esa cuenta bancaria al final del año?

```
N=1
I% = 12
PV = -1100
PMT = 0
FV = 1239.507533
P/Y = 1
C/Y = 12
PMT: [ ] [ ] BEGIN
```

Respuesta del alumno:

$$1100(1 + 12/1200)^{12} = 1239,51$$

## Ejemplos tomados del banco de preguntas

## Prueba 1, pregunta 4

Roberto invierte 600 euros en un banco que ofrece un interés compuesto anual del 2,75%.

- Calcule cuánto dinero tiene Roberto después de 4 años.
- Calcule en cuántos años se duplica su inversión.

Ana invierte 600 euros en otro banco que ofrece un interés compuesto anualmente. Su inversión se duplica en 20 años.

- Halle la tasa de interés (tipo de interés) que ofrece este banco.

El alumno debe utilizar el modo de operaciones y la tabla de valores o bien "Finance".

**a)**

- Introduzca  $Y1 = 600(1 + 2,75/100)^x$ .

X	Y1	
3.8	665.15	
3.9	666.96	
4	668.77	
4.1	670.59	
4.2	672.41	
4.3	674.24	
4.4	676.07	
X=4		

N=4
I%=2.75
PV=-600
PMT=0
FV=668.7727556
P/Y=1
C/Y=1
PMT: [ ] BEGIN

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^4 = 668,77$$

**b)**

- Recorra la tabla hasta que aparezca para y el valor 1200.

X	Y1	
25.5	1198.4	
25.6	1201.6	
25.7	1204.9	
25.8	1208.2	
25.9	1211.4	
26	1214.7	
26.1	1218	
X=25.6		

N=25.55035862
I%=2.75
PV=-600
PMT=0
FV=1200
P/Y=1
C/Y=1
PMT: [ ] BEGIN

El primer valor es 25,6; por tanto la respuesta es 26 años.

Respuesta del alumno:

$$600(1 + 2,75/100)^n = 1200$$

$$n = 26$$

**(c)**

- No es posible hallar la respuesta mediante tablas. Se debe utilizar "Finance".

```

N=20
I% = 3.526492384
PV = -600
PMT = 0
FV = 1200
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: [ ] BEGIN

```

Respuesta del alumno:

$$600(1 + r/100)^{20} = 1200$$

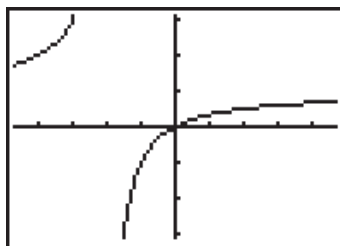
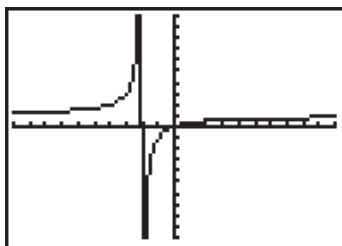
$$r = 3,53 \%$$

## Prueba 1, pregunta 11

- Dibuje aproximadamente la gráfica de  $y = \frac{x}{2+x}$  para  $-10 \leq x \leq 10$ .
- A partir de lo anterior escriba las ecuaciones de las asíntotas vertical y horizontal.

**a)**

- El alumno debe darse cuenta de que la línea vertical no debe aparecer, y utilizar por tanto "Zdecimal" para que se omita.

**b)**

- Para hallar la asíntota vertical, el alumno puede utilizar la función "TRACE" sobre la gráfica, o utilizar la tabla de valores (cuando aparece "ERROR" en el valor de  $y$ , entonces el valor correspondiente de  $x$  es donde se encuentra la asíntota).

X	Y1	
-5	1.6667	
-4	2	
-3	3	
-2	ERROR	
-1	-1	
0	0	
1	.33333	
X = -2		

Respuesta del alumno:

La asíntota vertical está en  $x = -2$ .

- Para hallar la asíntota horizontal, el alumno tendrá que desplazarse por la curva para valores grandes o pequeños de  $x$ .

Respuesta del alumno:

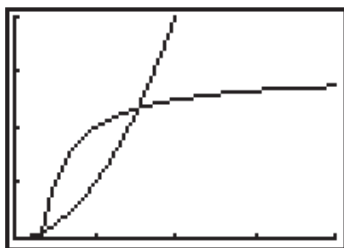
La asíntota horizontal es  $y = 1$ .

Por supuesto, los profesores pueden enseñar a los alumnos a calcular las asíntotas.

## Prueba 2, pregunta 1

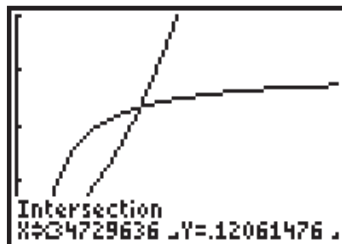
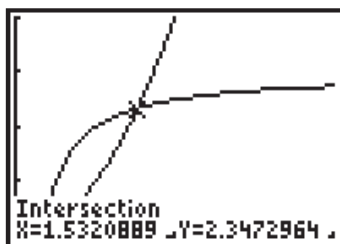
- a) En el mismo sistema de ejes dibuje aproximadamente las curvas  $y = x^2$  e  $y = 3 - \frac{1}{x}$  para valores de  $x$  desde 0 hasta 4 y valores de  $y$  desde 0 hasta 4. Muestre las escalas en los ejes.
- b) Halle los puntos de intersección de estas dos curvas.
- c) i) Halle la pendiente de la curva  $y = 3 - \frac{1}{x}$  en función de  $x$ .  
ii) Halle el valor de esta pendiente en el punto  $(1, 2)$ .
- d) Halle la ecuación de la tangente a la curva  $y = 3 - \frac{1}{x}$  en el punto  $(1, 2)$ .

**a)**



- El alumno debe añadir la escala.

**b)**



**c)**

Respuesta del alumno:

i)  $dy/dx = 1/x^2$

ii)  $dy/dx = 1/1 = 1$

Este valor también se puede hallar con la calculadora.



**d)**

Respuesta del alumno:

$$y = mx + c$$

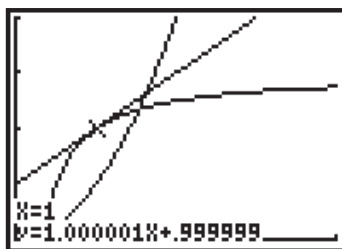
$$y = 1x + c$$

$$2 = 1 \times 1 + c$$

$$c = 1$$

$$y = x + 1$$

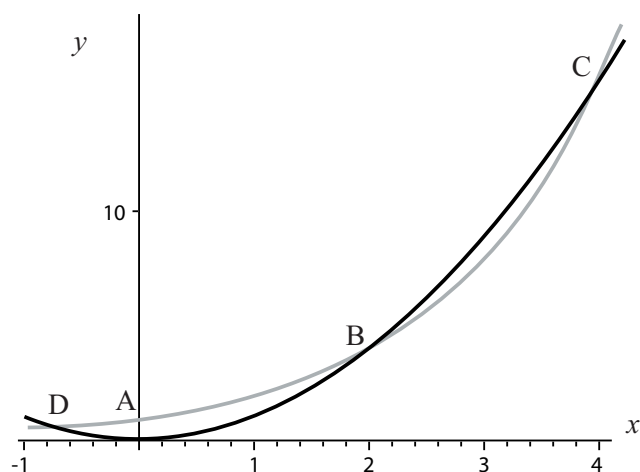
- El alumno debe comprobarlo con la calculadora.





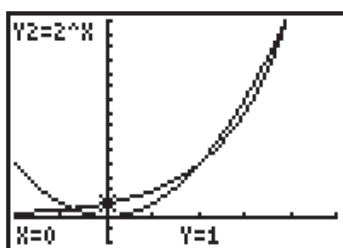
## Prueba 2, pregunta 3

La figura dada a continuación muestra las gráficas de las funciones  $y = x^2$  e  $y = 2^x$  para valores de  $x$  entre  $-1$  y  $4$ . Los puntos de intersección de las dos curvas están marcados como B, C y D.



- Escriba las coordenadas del punto A.
- Escriba las coordenadas de los puntos B y C.
- Halle la abscisa,  $x$ , del punto D.
- Escriba, usando notación de intervalo, todos los valores de  $x$  para los cuales  $2^x \leq x^2$ .

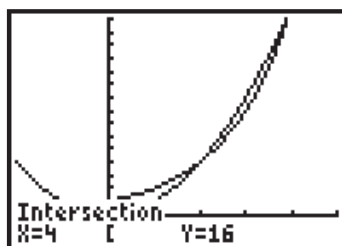
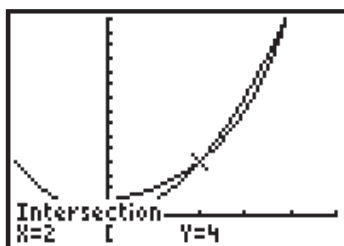
**a)**



Respuesta del alumno:

Cuando  $x = 0$ ,  $y = 1$ , por tanto las coordenadas de A son  $(0, 1)$ .

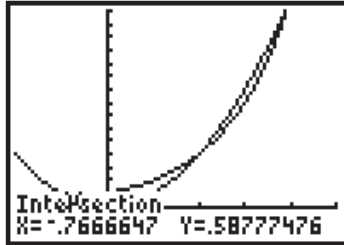
**b)**



Respuesta del alumno:

Las coordenadas de B son (2, 4) y las de C son (4, 16).

**c)**



Respuesta del alumno:

La abscisa,  $x$ , de D es  $-0,767$ .

**d)**

A partir de la gráfica y de los puntos de intersección, el alumno deber ser capaz de ver que  $2^x \leq x^2$  para  $2 \leq x \leq 4$  y para  $-\infty \leq x \leq -0,767$ .

## Prueba 2, pregunta 4

En el circo, un payaso se balancea desde una cuerda. Un estudiante decide estudiar el movimiento del payaso. Los resultados se pueden mostrar mediante la gráfica de la función  $f(x) = (0,8^x)(5\text{sen}100x)$ , donde  $x$  es la distancia horizontal en metros.

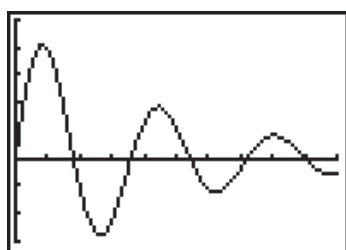
- Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 10$  et  $-3 \leq f(x) \leq 5$ .
- Halle las coordenadas del primer punto máximo local.
- Halle las coordenadas de un punto donde la curva corta al eje  $x$ .

Otro payaso sale disparado por un cañón. El payaso pasa por los puntos dados en la siguiente tabla:

Distancia horizontal ( $x$ )	Distancia vertical ( $y$ )
0,00341	0,0102
0,0238	0,0714
0,563	1,69
1,92	5,76
3,40	10,2

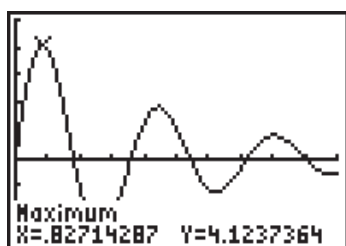
- Halle el coeficiente de correlación,  $r$ , y comente las características de este valor.
- Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ .
- Dibuje aproximadamente esta recta sobre la gráfica de  $f(x)$  del apartado a).
- Halle las coordenadas de uno de los puntos donde esta recta corta a la curva.

**a)**



- El alumno debe añadir la escala en el dibujo.

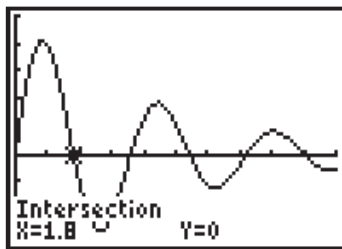
**b)**



Respuesta del alumno:

El primer máximo se encuentra en el punto (0,827; 4,12).

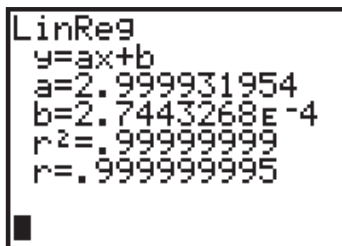
c)



Respuesta del alumno:

(1,8; 0)

d)



Respuesta del alumno:

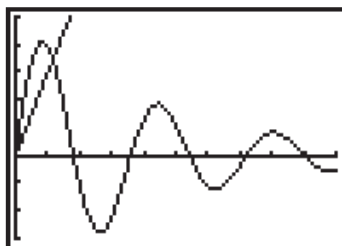
$r = 1$ , por tanto la correlación es perfecta y positiva.

e)

Respuesta del alumno:

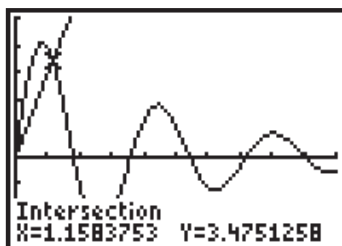
La ecuación de la recta de regresión es  $y = 3x + 0,000274$  o  $y = 3x$ .

f)



- El alumno debe añadir la escala en el dibujo.

g)



Respuesta del alumno:

Un punto de intersección es (1,16; 3,48).







